考试科目名称 离散数学（B卷）

考试方式： 闭 卷　 考试日期 2019 年 月 日 教师

系（专业）　 计算机科学与技术系　　　年级　 班级

学号　　　 姓名　　 　　　成绩

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 |
| 分 数 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**一、（本题满分10分）**

请运用命题逻辑进行表示，并证明下列推理。

（1）“今天海面不平稳并且紫外线不强”，（2）“若今天海面不平稳或紫外线很强，则探险队不出海”，（3）“若探险队不出海，则探险队将修理船只”，（4）“若探险队修理船只，则探险队在晚上发布行程记录”，**证明结论**“探险队在晚上发布行程记录”。

**答案：**

***p*: 今天海面平稳，*q*: 今天紫外线不强，*r*: 探险队出海，*s*: 探险队修理船只，*t*: 探险队在晚上发布行程记录 （2分）**

**表示：¬*p* ∧ *q，*¬*p∨*¬*q* →¬*r ，*¬*r* → *s，s* → *t，*证明 *t （2分）***

* 1. **¬*p* ∧ *q***
  2. **¬*p***
  3. **¬*p∨*¬*q***
  4. **¬*r （* ¬*p∨*¬*q* →¬*r* *）***
  5. **s （¬*r* → *s* ）**
  6. ***t （s* → *t）***

（上述证明过程6分）

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**二、（本题满分12分）**

定义集合**S={(x,y,z)│x,y,z∈N}**上的关系R：若(x,y,z)R(a,b,c)，当且仅当存在非负实数k，使得(x,y,z)=k(a,b,c)，

（1）证明R为等价关系；

（2）请至少写出三个元素分别与(1, 2, 3)和(2, 2, 2)属于同一等价类；

（3）除等价类{(0, 0, 0)}外，请分析其他等价类属于有限集合、属于可数无穷集、属于不可列集合的情况。

**答案：**

1. 证明R为等价关系，分别证明自反性、对称性、传递性

自反性：

对任意（x,y,z）∈S，存在非负整数k=1，使得(x,y,z)=1(x,y,z)

由关系R的定义，有(x,y,z)R(x,y,z)，

即对任意（x,y,z）有(x,y,z)R(x,y,z)，关系R满足自反性.

对称性易见。

传递性：

对任意R中的两个元素满足(x1,y1,z1)R(x2,y2,z2)，(x2,y2,z2)R(x3,y3,z3)

存在非负整数k1，k2使得(x1,y1,z1)=k1(x2,y2,z2)，(x2,y2,z2)=k2(x3,y3,z3)

令K=k1\*k2，则有(x1,y1,z1)=k1k2(x3,y3,z3)=K(x3,y3,z3)，K是非负整数。 根据R的定义，有(x1,y1,z3)R(x3,y3,z3)，关系R满足传递性

1. (2,4,6)，(4,8,12)，（8,16,24）….

(1,1,1)，(4,4,4)，(8,8,8) …

1. 因为k是非负整数，{(0,0,0)}以外的所有等价类都是可数无穷集。

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**三、（本题满分10分）**

设方程X×Y=(X∨Y)×(X∧Y)，其中未知整数X,Y∈[0,31]，×表示普通乘法运算，X∨Y表示变量X和Y对应二进制数的按位或运算，X∧Y表示变量X和Y对应二进制数的按位与运算. 试求此方程所有整数解的组数.

答案：

（1）证明结论：若满足此方程式，当且仅当(X∨Y)等于X和Y中的较大值，且(X∧Y) 等于X和Y中的较小值。

证明：假设X<=Y，则(X∧Y)<=X,(X∨Y)>=Y,且设X∨Y = Y + a (a为整数)，则(X∧Y) = X – a

(X∨Y)×(X∧Y) = (X-a) ×(Y+a) = X×Y-a×(Y-X)-a\*a <= X×Y，且当且仅当a=0时等号成立。

所以当X<=Y，等式成立时当且仅当(X∨Y)=Y且(X∧Y)=X。

所以由对称性，若满足此方程式，当且仅当(X∨Y)等于X和Y中的较大值，且(X∧Y) 等于X和Y中的较小值。

（2）根据以上定理，枚举1的个数，整数解个数为

2\*(C(5,0)\*2^0+C(5,1)\*2^1+C(5,2)\*2^2+C(5,3)\*2^3+C(5,4)\*2^4+C(5,5)\*2^5)-2^5 =**454**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**四、（本题满分10分）**

一辆出租车在夜晚肇事之后逃逸，一位目击证人辨认出肇事车辆是蓝色的。已知这座城市 85% 的出租车是绿色的，15% 是蓝色的。警察经过测试，认为目击者在当时可以正确辨认出这两种颜色的概率是80%, 辨别错误的概率是 20%. 请问，肇事出租车是蓝色的概率是多少？

**答案：**

事件A：目击证人辨认车是蓝色的，B：肇事车是蓝色的，

则P(B)=0.15，

根据全概率公式，P(A)=0.85\*(1-0.8)+0.15\*0.8=0.29

根据贝叶斯公式

P(B|A)=P(B)\*P(A|B)/P(A) = 0.15\*0.8/0.29约等于0.41

肇事出租车是蓝色的概率是41%。

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**五、（本题满分12分）**

考虑整数加群（Z，+）的循环子群<a>和<b>，其中a, b分别是两个循环群的生成元，则<a>是<b>的子群当且仅当 b|a。

**答案：**

先证明充分性，即：

考虑整数加群（Z，+）的循环子群<a>和<b>，其中a, b分别是两个循环群的生成元，b|a，证明<a>是<b>的子群

证明：由b|a得，存在一整数k，使得b=k\*a。

n和k为整数，n\*k为整数，

所以对于任意<a>中的元素ai=a^i，存在一整数k，使得a^i=b^(i\*k) ∈<b>

所以<a>是<b>的子群。

再证明必要性，即：

考虑整数加群（Z，+）的循环子群<a>和<b>，其中a, b分别是两个循环群的生成元且， <a>是<b>的子群，证明b|a

证明：由<a>是<b>的子群，对任意<a>中元素ai=a^i,aj=a^j，则ai，aj∈<b>

令j=i+1，则存在整数p,q，满足a^i=b^p，a^(i+1)=b^q

两边分别做商，得a=b^(q-p) = b+b+…+b(q-p个b相加)=(q-p)\*b

令r = q-p，由p和q为整数，r为整数，即存在整数r，使得a=r\*b

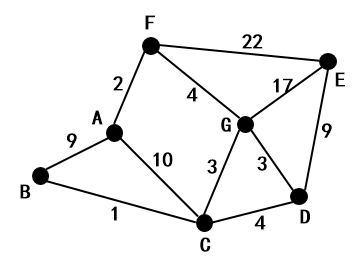
所以b|a.

因此，<a>是<b>的子群，当且仅当b|a.

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**六、（本题满分10分）**

求下图中以A为源点到图中其他所有点的最短路径。



**Dijkstra**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 迭代次数 | L(B) | L(C) | L(D) | L(E) | L(F) | L(G) | 点 |
| 初始 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |  |
| 1 | 9 | ∞ | ∞ | ∞ | **2** | ∞ | A |
| 2 | 9 | ∞ | ∞ | 24 |  | **6** | F |
| 3 | **9** | 9 | 9 | 23 |  |  | G |
| 4 |  | **9** | 9 | 23 |  |  | B |
| 5 |  |  | **9** | 23 |  |  | C |
| 6 |  |  |  | **18** |  |  | D |

**AB=A-B=9, AC=A-F-G-C=9, AD=A-F-G-D =9,**

**AE=A-F-G-D-E=18, AF=A-F=2, AG=A-F-G=6**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**七、（本题满分12分）**

有甲、乙、丙、丁4个人，从甲开始相互传球6次（自己不能传球给自己），要求球最终回到甲的手中（例如甲→乙→甲→乙→甲→乙→甲 或者甲→乙→丙→丁→丙→乙→甲 都是允许的传球方式）.

1. 建立上述问题的数学模型.

⑵ 求解这样的传球方式共有多少种？

**答案：**

**每一步球都有3种传法，传球x次总方法数为3^x**

**若第x次传球后球在甲手中，则第x-1次时，球一定不在甲手中。**

**令a(x)：从甲开始传球x次，球回到甲的手里的方法数。**

**则a(1) = 0**

**则可得到递推式a(x+1)=3^x – a(x)**

**（2）**

**解此递推式，得a(x+1) - (1/4)\*3^(x+1)= - a(x) + (1/4)\*3^x**

**令b(x) = a(x)-(1/4)\*3^x，则b(x+1) = -b(x)**

**b(x) = (-1)^(x+1) \* b(1) = (-1)^(x+1)\*(a(1)-(1/4)\*3)**

**a(x)通项公式为：a(x) =3/4 \*(-1)^x + (1/4)\*3^x**

**根据a(x)，得a(6) = 183。**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

**八、（本题满分12分）**

所谓“子图同构”(Subgraph isomorphism)问题是指：

对于任意的图和图, 判定是否存在的一个子图 使得与同构（记作）.

试说明，“判断一个图是否是哈密尔顿图”这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

**答案：**

要证 与子图同构（为的子图）

即证 双射函数,使得，当且仅当

， 2分

要证 是哈密尔顿图

即证 中存在哈密尔顿回路 2分

设的顶点数为*n*。 1分

中存在哈密尔顿回路 充分必要 中存在一个与同构的子图。 6分

因此，判断一个图是否是哈密尔顿图，可以作为子图同构问题的一个特例 1分

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |

1. **（本题满分12分）**

G的**围长**是指**G中最短回路的长**；若G没有回路，则定义G的围长为无穷大。证明：围长为4的k正则图至少有2k个顶点，且恰有2k个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

答案：

设u，v是G中相邻顶点，N(u) 和N(v)分别代表u和v的邻居构成的集合，则N(u) 和N(v)不相交，否则G的围长为3，产生矛盾。因此，G至少有2(k-1)+2个顶点。

将N(u)\{v} 和N(v) \{u}连为完全偶图，得到2k个顶点的围长为4的图。不难证明，这样的图（在同构意义下）只有一个。